

电压控制型 BUCK 变换器 DCM 的精确离散模型 及分叉稳定性分析

曲 颖,张 波

(广州华南理工大学电力学院雅达电源实验室,广东广州 510640)

摘 要: 本文建立了不连续运行模式下电压反馈型 BUCK 变换器精确的离散数学模型,在此基础上分析了 BUCK 变换器的分叉稳定性问题,得到了变换器参数之间相互关系的解析表示式,改进了已有近似模型的结论,界定了变换器主要参数的稳定运行范围,并展现了 BUCK 变换器从稳定到倍周期分叉甚或混沌的过程. 本文的研究方法具有一般性,为 DC/DC 功率变换器非线性现象的分析建立数学模型基础.

关键词: DC/DC 功率变换器; 矩阵函数; 离散模型

中图分类号: TM17 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 08-1253-04

The Precise Mathematical Discrete Model of BUCK Converter in DCM and Its Analysis for Bifurcation Stability

QU Ying, ZHANG Bo

(College of Electrical Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China)

Abstract: Propose a precise discrete model of simple BUCK converter, which is operated in discontinuous mode (DCM). Based on the model, bifurcation phenomena in the converter are analyzed. Compared with the approximate model, the new model has more advantages in showing and explaining the strange non-linear phenomena. So the study in the paper is necessary, and it is not limited in the circuits of BUCK Converter but in all the DC/DC power converters.

Key words: DC/DC power converter; matrix function; discrete model

1 引言

随着科学技术的进步,尤其是电子计算机的发展,复杂的非线性系统理论和实际现象研究获得了长足的发展.过去,人们在众多非线性系统中都发现了许多奇怪的现象,如在 DC/DC 功率变换器中的不规则现象——刺耳的电磁噪音、控制系统的间歇不稳定和临界运行的突然崩溃等等.由于认识上的局限性,相当一段时间内,人们都把这些现象当作随机干扰和系统故障.随着非线性系统理论的发展,人们对 DC/DC 功率变换器研究的逐渐深入,认识到它们与 DC/DC 功率变换器的非线性特性密切相关.就目前的研究成果表明,这种开关非线性系统,系统参数、运行参数的变化可能导致系统出现不稳定运行,这些不稳定运行将导致 DC/DC 功率变换器出现倍周期分叉和混沌现象,从而表现为不规则的现象.

目前,DC/DC 功率变换器非线性稳定性分析、次谐波现象分析、分叉稳定性分析、混沌现象分析已成为一个新的前沿课题^[1].对 BUCK、BOOST、BUCK-BOOST、CUK 变换器,已就连续、不连续模式运行、电压反馈或电流反馈的控制方式运行都进行了一定的探索,在非线性模型建立、现象分析方面作了相

当的工作.而 DC/DC 功率变换器中混沌等非线性现象的分析方法主要分为两类:一是纯数值仿真方法;二是近似模型分析方法.前者明显的缺点是无法得到解析结果,无法了解变换器内部参数间的相互关系,限制了进一步深入的研究.后者可以得到近似的解析结果和变换器内部参数间的大致相互关系,但一些有用的信息可能因为近似而被丢失,特别是对于非线性系统,参数的微小差异可能导致截然不同的分析结果,使得出结论的真实性受到质疑.因而建立精确的数学模型对于描述系统的真实非线性特性是非常必要的.

本文基于此目标,首次建立不连续运行模式下 BUCK 变换器精确的离散数学模型,并在此基础上分析了 BUCK 变换器分叉稳定性问题,改进了近似的模型,为 DC/DC 功率变换器非线性现象分析打下数学基础.

2 不连续运行模式下 BUCK 变换器的精确离散模型

电压反馈型 BUCK 变换器典型电路如图 1 所示,图中考虑了输出滤波电容的寄生电阻.

设状态变量向量为 $x = [v_c \ i_L]^T$, 变换器工作在不连续运行模式时, 电路有三个不同的线性工作模式: 模式 1——开关 S 导通, 二极管 VD 关断; 模式 2——开关 S 关断, 二极管 VD 导通; 模式 3——二极管 VD 和开关 S 都不导通.

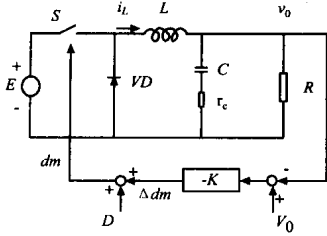


图 1 电压反馈型 BUCK 变换器典型电路

根据三个模式列状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 E, & t_n \leq x < t_{n+1} \\ \dot{x} = A_2 x + B_2 E, & t_n \leq x < t_n \\ \dot{x} = A_3 x + B_3 E, & t_n \leq x < t_{n+1} \end{cases} \quad (1)$$

其中, $t_n \sim t_{n+1}$ 为一个工作周期 T ; $t_n \sim t_n$ 对应于模式 1 工作时间; $t_n \sim t_n$ 对应于模式 2 工作时间; $t_n \sim t_{n+1}$ 对应于模式 3 工作时间. 式(1)的系数矩阵分别为:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{C(R+r_c)} \begin{bmatrix} -1 & R \\ -\frac{CR}{L} & -\frac{CRr_c}{L} \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}; \\ A_2 &= \frac{1}{C(R+r_c)} \begin{bmatrix} -1 & R \\ -\frac{CR}{L} & -\frac{CRr_c}{L} \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ A_3 &= \frac{1}{C(R+r_c)} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

令 $t_c = t_n - t_n$, $t_d = t_n - t_n$, $t_e = t_{n+1} - t_n$, 显然, 它们之间有如下关系,

$$\begin{cases} t_c = d_n T \\ t_d = \frac{E - V_c(t_n)}{V_c(t_n)} t_c \\ t_c + t_d + t_e = T \end{cases} \quad (2)$$

其中 d_n 是第 n 周期的占空比, t_d 与 t_c 之间的关系则由电感 L 上电流波形得出.

由图 1 可知, 由电压反馈 $d_n = -k V_c(t_n)$ 得到占空比为

$$d_n = D - k \times [V_c(t_n) - X] \quad (3)$$

$$h(d_n) = \begin{cases} 0, & d_n < 0 \\ 1, & d_n > 1 \\ d_n, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

在一个周期内, 由式(1)可以求得离散迭代模型方程式如下:

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= e^{A_3 t_e} e^{A_2 t_d} e^{A_1 t_c} \left[x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{A_1(t-t_n)} B_1 E dt \right] \\ &+ e^{A_3 t_e} e^{A_2 t_d} \int_{t_n}^{t_n} e^{A_2(t-t_n)} B_2 E dt \\ &+ e^{A_3 t_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{A_3(t-t_n)} B_3 E dt \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $e^{A_i t}$ ($i=1,2,3$) 是矩阵指数的 e 幂函数, 可用级数表示:

$$e^{A_k} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_k^n \quad k=1,2,3 \quad (6)$$

文[2]用式(6)的前三项来做近似 $e^{A_i t}$ ($i=1,2,3$), 得到一个近似离散迭代模型方程, 它在一定程度上简化了对 BUCK 变换器稳定性的分析, 但从其理论仿真与实验结果对比看, 两者存在明显的误差, 为此有必要求取其精确的离散迭代模型方程.

首先需要求解精确的解析表达式 $e^{A_i t}$ ($i=1,2,3$). 分别利用凯莱-哈密顿定理和拉普拉斯法^[3]对其求解, 得

$$\begin{aligned} e^{A_1 t} &= e^{A_2 t} = a_0(t) I + a_1(t) A_1 \\ &= \begin{bmatrix} a_0(t) - ma_1(t) & Rma_1(t) \\ -\frac{CR}{L} ma_1(t) & a_0(t) - \frac{CRr_c}{L} ma_1(t) \end{bmatrix} \quad (7) \\ e^{A_3 t} &= \begin{bmatrix} e^{-mt} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

其中, $m = 1/C(R+r_c)$; I 为二阶单位矩阵;

$$a_0(t) = \frac{e^{-amt}}{2} [\sin(mt) + \cos(mt)];$$

$$a_1(t) = \frac{e^{-amt}}{2} \sin(mt);$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{CRr_c}{L} \right); = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{LR}{m} - \left(1 + \frac{CRr_c}{L} \right)^2}$$

接着, 需要对式(5)的积分项进行处理. 引入矩阵指数函数的重要性质^[4],

$$(1) \quad \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

$$(2) \quad e^A e^B = e^A e^B = e^{A+B} \quad \text{when,} \quad AB = BA$$

式(5)可变形为,

$$x(t_{n+1}) = e^{A_3 t_e} e^{A_2 t_d} e^{A_1 t_c} x(t_n) + e^{A_3 t_e} e^{A_2 t_d} (e^{A_1 t_c} - I) A_1^{-1} B_1 E \quad (9)$$

将式(7)和式(8)代入式(9), 就可求得不连续 BUCK 变换器精确的离散迭代模型方程如下:

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= e^{-mt_c} \{ [a_0(t_d) - ma_1(t_d)] [a_0(t_c) - ma_1(t_c)] \\ &- \frac{R^2 m^2 c}{L} a_1(t_d) a_1(t_c) \} x(t_n) + E e^{-mt_e} \{ [a_0(t_d) \\ &- ma_1(t_d)] [1 - a_0(t_c)] + Rma_1(t_d) \left[\frac{1}{L} a_1(t_c) \right. \\ &\left. - \frac{1}{R} a_0(t_c) + \frac{1}{R} \right] \} \end{aligned} \quad (10)$$

在此注意, 由于电路工作在不连续模式, $i_L(t_n) = 0$, 所以迭代事实上是一阶的, 只有滤波电容电压 $v_c(t_n)$ 起作用. 文中为方便起见不再另外用 $v_c(t_n)$, 而仍是用 $x(t_n)$ 来表示.

显然, 从式(10)可以看出, BUCK 变换器精确的离散迭代模型方程是一个非线性方程. 与之相对照, 文[2]用式(6)中的泰勒展开式的前三项来做近似, 求得近似的离散迭代模型方程为

$$x_{n+1} = x_n + \frac{d_n^2 E (E - x_n)}{x_n} \quad (11)$$

其中, $x_n = v_c(t_n) = v_c(nT)$;

$$= 1 - \frac{T}{C(R+r_c)} + \frac{T^2}{2C^2(R+r_c)^2} \text{ 和 } = \frac{RT^2}{2LC(R+r_c)}.$$

可以看到(11)式的表达式较简单, 但其代价是丢失掉了许多有用的信息, 并且仿真结果与实际的误差较大.

3 不连续运行模式下 BUCK 变换器的稳定性判据

稳定性是一个系统的重要性能指标, 一个系统应该在任

何小扰动叠加到稳定点时,都能快速削减扰动,最终使之减少到零.非线性系统稳定性判别条件如下:

$$\left| \frac{\partial x(t_{n+1})}{\partial x(t_n)} \right| = \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x} < 1 \quad (12)$$

定义式(10)如下:

$$x_{m+1} = L_1 \cdot x_m + L_2 \quad (13)$$

其中 L_1 、 L_2 见附录.

对式(13)求导可得:

$$\frac{dx_{m+1}}{dx_m} = L_1(x_m) + L_1(x_m) \cdot x_m + L_2(x_m) \quad (14)$$

其中 L_1 、 L_2 见附录.

将系统参数代入上述各式即可分析不同参数,如电压反馈参数 k 、占空比 d 、输入电压 E 对系统稳定运行特性的影响.

4 电压反馈系数 k 变化下的仿真结果与比较

为了便于比较,本文的仿真电路采用文献[2]的实验电路参数,总结见表 1.

此外, $T/C(R+r_c) = 0.12$.

将实验参数代入式(14)得,

$$\frac{dx(t_{n+1})}{dx(t_n)} = -11.0776k + 0.4789 \quad (15)$$

令上式等于 -1 求得系统稳定临界点 $k_c = 0.1335$. 所以,当 $k < k_c$ 时系统稳定,当 $k > k_c$ 时系统开始进入分叉. 根据式(10)仿真得到分叉图如图 2(a)所示. 研究表明,当反馈系数 k 并非愈大愈好,对于一定的电路参数下,当 k 大于一定临界值时,BUCK 变换器将出现不稳定的混沌现象,影响系统的运行性能.

表 1

电路参数	数值
开关周期 T	333.33 μ Sec
输入电压 E	33V
输出电压 X	25V
功率	50W
电感 L	208 μ H
电容 C	222 μ F
负载电阻 R	12.5

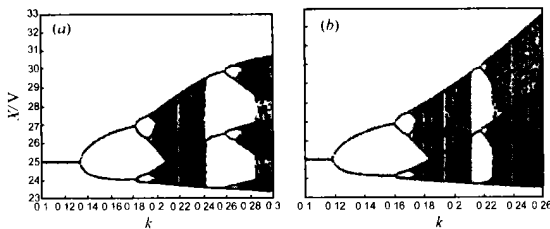


图 2 两种离散模型的仿真结果比较。(a)应用精确模型得到的分叉图;(b)应用简化迭代式得出的分叉图

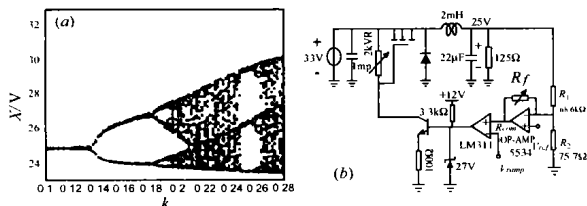


图 3 实验结果比较。(a)纯数值仿真实验分叉图;(b)实验电路图

按式(11)仿真结果见图 2. 根据文献[2]的推倒和图 2 得出的系统稳定临界值为 $k_c = 0.119$.

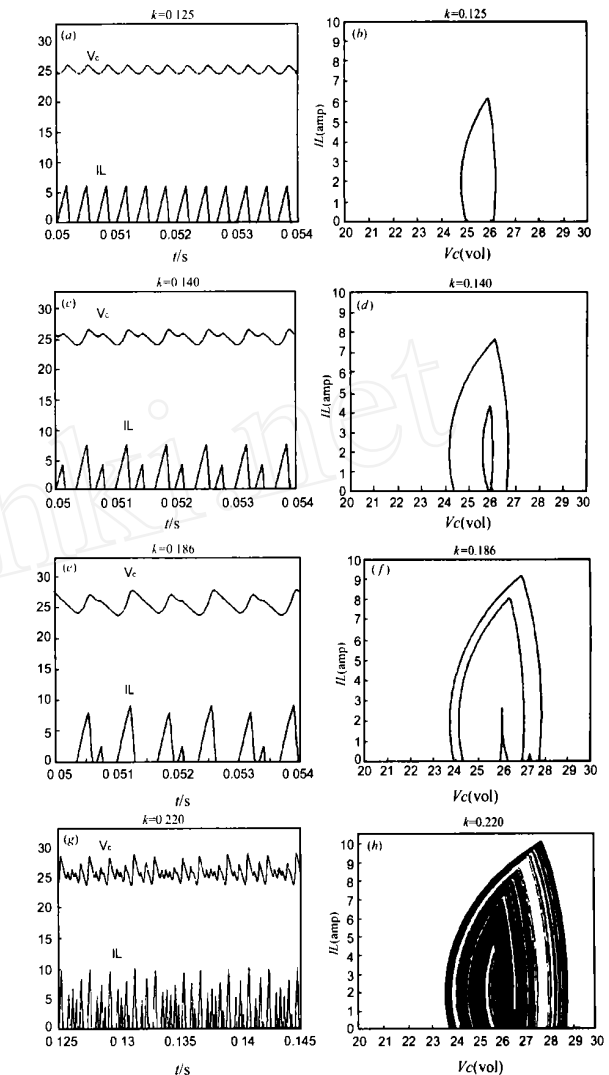


图 4 不连续 BUCK 系统时域图和相位图

(a)、(c)、(e)、(g)为 k 在 0.1、0.14、0.186、0.22 时的系统时域波形图;(b)、(d)、(f)、(h)为相应 k 值时的相轨迹图

图 2 中(a)与(b)两个分叉图比较,可以看到二者共同表述了:当 k 值较小时系统保持稳定;当 k 值超过临界值时系统开始进入分叉; k 值继续增加,系统通过倍周期路线最终进入混沌. 另外, 两图都展现了系统的混沌区域中存在一个有趣的“三周期窗”[2]. 二者不同的是分叉点的位置和混沌参数范围有所不同,尤其是系统的稳定临界点不同. 图 2(a)的分叉临界点在 $k = 0.1335$ 处,而图 2(b)用近似的离散模型所得到的结果分叉点在 $k = 0.119$.

为了验证仿真结果的正确性,对电路进行了数值仿真和实验. 图 3(a)给出了用纯数值仿真得出的系统分叉图,图 3(b)给出了实验电路图. 将图 2 与图 3 比较发现,本文提出的离散模型所求得的分叉图与数值仿真的结果吻合得非常好,而近似模型得到的仿真结果相差甚远,尤其是稳定临界点的位置. 由此足以证明了本模型的正确性和精确性.

为了更加形象的观测系统中的非线性分叉和混沌现象,我们运用了与前面相同的离散精确建模的方法对电路仿真,得到了时域波形图和相位图,如图 4(a)~(h)。

我们分别仿真了 $k=0.1, 0.14, 0.186, 0.22$ 时的系统稳态时域波形,同时也得出了相应 k 值下的相轨迹图形。显然系统分别展现出基周期、倍周期、4-周期、和混沌的现象。这与文献[2]中的结果是近乎相同的,这也说明了本文提出的精确离散模型的正确性。

5 结论

本文首次建立不连续运行模式下电压反馈型 BUCK 变换器精确的离散数学模型,通过一系列数学推导不做任何近似而得出了精确的迭代式。并且通过仿真计算得到更贴近实际的结果,得到系统进入分叉的精确点,展现了此模型的正确性。从而为研究 BUCK 变换器从倍周期分叉到混沌运动的过程提供了一种更有利的方法。本模型所用方法具有一般性,可以推广到其他 DC/DC 功率变换器的建模当中。

附录

$$L_1 = e^{-m t_3} \{ [a_0(t_2) - ma_1(t_2)] [a_0(t_1) - ma_1(t_1)] - \frac{R^2 m^2 C}{L} a_1(t_2) a_1(t_1) \} ;$$

$$L_2 = E e^{-m t_3} \{ [a_0(t_2) - ma_1(t_2)] [1 - a_0(t_1)] + R ma_1(t_2) \left[\frac{1}{L} a_1(t_1) - \frac{1}{R} a_0(t_1) + \frac{1}{R} \right] \} ;$$

$$L_3 = -m L_1 t_3 + e^{-m t_3} \{ (a_0(t_2) - m(a_0(t_2))) (a_0(t_1) - ma_1(t_1)) + (a_0(t_2) - ma_1(t_2)) (a_1(t_1) - m(a_1(t_1))) - \frac{R^2 m^2 C}{L} (a_0(t_2) a_1(t_1) + a_1(t_2) (a_0(t_2))) \} ;$$

$$L_4 = -m L_2 t_3 + E e^{-m t_3} \{ (a_0(t_2) - m(a_0(t_2))) (1 - a_0(t_1)) + (a_0(t_2) - ma_1(t_2)) (-a_0(t_1)) + m(a_0(t_2) - \frac{R}{L} a_1(t_1) - a_0(t_1) + 1) + ma_1(t_2) (\frac{R}{L} a_1(t_1) - a_0(t_1)) \} ;$$

其中, $(t_i) = \frac{d(a_0(t_i))}{d t_i}$ 、 t_i

$$= \frac{-M(\gamma + \gamma)}{d t_i} e^{-m t_i} \sin(m t_i) t_i ;$$

$$(t_i) = \frac{d(a_1(t_i))}{d t_i} \times t_i$$

$$= \frac{1}{L} e^{-m t_i} (-\sin(m t_i) + \cos(m t_i)) t_i ;$$

$$t_1 = -kT; \quad t_2 = \frac{-T}{x_m} \left[k(E - x_m) + \frac{d_m E}{x_m} \right];$$

$$t_3 = \frac{ET}{x_m} \left[k + \frac{d_m}{x_m} \right]; \quad d_m = D - k(x_m - V_c).$$

参考文献:

- [1] Abdelali El Aroudi, et al. Quasiperiodicity and chaos in the DC-DC Buck-Boost converter [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000, 10(2): 359 - 371.
- [2] C K Tse. Chaos from a Buck switching regulator operating in discontinuous mode [J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 1994, 22: 263 - 278.
- [3] 程少庚, 崔杜武, 等. 电网络分析 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1993.
- [4] 罗家洪. 矩阵分析 [M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1996.

作者简介:



曲颖女, 1977年1月生于吉林省吉林市, 1999年毕业于天津大学电气自动化与能源工程学院, 现在华南理工大学电力学院攻读硕士研究生, 主要研究方向为高频开关电源及其混沌现象。



张波男, 1962年10月生于福建三明, 博士, 教授, 博士生导师, 现在华南理工大学电力学院任教, 已主持和参加十几项包括国家自然科学基金在内的科研项目, 发表论文 60 余篇, 目前主要研究方向为电力电子及电力传动。